ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-101-110

УДК 517.927.4

О существовании положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка

Гусен Эльдерханович АБДУРАГИМОВ

ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»

367025, Российская Федерация, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а

Аннотация. Рассматривается краевая задача

$$\begin{aligned}
&D^{\alpha}_{0+}x(t) + f\left(t, (Tx)(t)\right) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad \text{где} \ \ \alpha \in (n-1, n], \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2,\\
&x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0,\\
&x(1) = 0.
\end{aligned}$$

Эта задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению с монотонным оператором в пространстве C непрерывных на $[0,1]$ функций (пространство C полагается упорядоченным конусом неотрицательных функций, удовлетворяющих граничным условиям рассматриваемой задачи). С помощью известной теоремы Красносельского о неподвижных точках оператора растяжения (сжатия) конуса доказано существование хотя бы одного положительного решения рассматриваемой задачи. Приведен пример, иллюстрирующий выполнение достаточных условий, обеспечивающих разрешимость поставленной задачи. Полученные результаты являются продолжением исследований автора (см. [Вестник российских университетов. Математика, **27**:138 (2022), 129–135]), посвященных вопросам существования и единственности положительных решений краевых задач для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение дробного порядка, положительное решение, краевая задача, функция Грина

Для цитирования: *Абдурагимов Г.Э.* О существовании положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 101–110. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-101-110

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-101-110

On the existence of a positive solution to a boundary value problem for one nonlinear functional-differential equation of fractional order

Gusen E. ABDURAGIMOV
Dagestan State University
43a M. Hajiyev St., Makhachkala 367025, Russian Federation

Abstract. The following boundary value problem is considered:

$$D^{\alpha}_{0+}x(t) + f\left(t, (Tx)\,(t)\right) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad \text{where} \quad \alpha \in (n-1, n], \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2,$$
$$x(0) = x'(0) = \ldots x^{(n-2)}(0) = 0,$$
$$x(1) = 0.$$

This problem reduces to an equivalent integral equation with a monotone operator in the space C of functions continuous on $[0,1]$ (the space C is assumed to be an ordered cone of nonnegative functions satisfying the boundary conditions of the problem under consideration). Using the well-known Krasnosel'sky theorem about fixed points of the operator of expansion (compression) of a cone, the existence of at least one positive solution of the problem under consideration is proved. An example is given that illustrates the fulfillment of sufficient conditions that ensure the solvability of the problem. The results obtained continue the author's research (see [Russian Universities Reports. Mathematics, **27**:138 (2022), 129–135]) devoted to the existence and uniqueness of positive solutions to boundary value problems for nonlinear functional-differential equations.

Keywords: functional-differential equation of fractional order, positive solution, boundary value problem, Green's function

Mathematics Subject Classification: 34K10, 34K17.

For citation: Abduragimov G.E. On the existence of a positive solution to a boundary value problem for one nonlinear functional-differential equation of fractional order. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 101–110. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-101-110 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В последние годы стала достаточно интенсивно развиваться теория дробного дифференцирования и интегрирования. Большое распространение дробные уравнения получили в многочисленных приложениях науки и техники. В частности, в физике они широко используются при описании различных стохастических процессов, диффузии в средах с фрактальной геометрией, при изучении деформационно-прочностных свойств полимерных материалов. Кроме того, активное развитие дробные дифференциальные уравнения нашли в химических процессах. Поэтому класс задач, в которых используется аналитический аппарат дробного исчисления, довольно широк и актуален.

С развитием теории дробного дифференцирования и интегрирования возрос интерес, в том числе, к исследованию краевых задач для нелинейных дробно-дифференциальных уравнений. Например, в [1,2] получены достаточные условия существования и единственности сингулярных нелинейных краевых задач с помощью теоремы о неподвижной точке в конусах. В [3] исследуется существование положительных решений системы нелинейных уравнений смешанных дробных порядков. В работе [4] на основе принципа сжатия и альтернативы Лере–Шаудера доказано существование и единственность нелинейной дробной краевой задачи с производной Капуто. С помощью известной теоремы Го–Красносельского в [5] найдены достаточные условия отсутствия и существования хотя бы одного или двух положительных решений нелинейной дробной краевой задачи. Дробные задачи с производной Капуто, помимо [4], рассматривались также в работах [6–8]. В достаточно общей постановке вопросы существования положительных решений краевых задач для нелинейных возмущенных дробных уравнений были изучены в [9, 10]. Отметим еще публикации [11–14], посвященные данной тематике.

Следует отметить, что, несмотря на интенсивное развитие теории дробно-дифференциальных уравнений, в литературе сравнительно немного работ, в которых подробно рассматривались бы вопросы существования и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений дробного порядка. В данной статье предпринята попытка в определенной степени восполнить этот пробел. С помощью теоремы Красносельского о неподвижных точках оператора растяжения (сжатия) конуса получены достаточные условия существования положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка. Среди последних результатов автора по настоящей тематике можно отметить основанные на близких подходах утверждения, опубликованные в работах [15, 16].

1. Постановка задачи

В дальнейшем для сокращения выкладок через C обозначим пространство $C[0,1]$, через $\mathbb{L}_p$ — пространство $\mathbb{L}_p(0,1)$ и $\mathbb{W}^n$ — пространство вещественных функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной $(n-1)$ производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$D^{\alpha}_{0+}x(t) + f\left(t, (Tx)\,(t)\right) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1.1}$$

$$x(0) = x'(0) = \ldots x^{(n-2)}(0) = 0, \tag{1.2}$$

$$x(1) = 0, \tag{1.3}$$

где $\alpha \in (n-1, n] \quad (n \in \mathbb{N}, \quad n > 2)$ — некоторое действительное число, D^{α}_{0+} — дробная производная Римана–Лиувилля, $T\colon C \to \mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна на $[0,1]\times[0,\infty)$, монотонно возрастает по второму аргументу и удовлетворяет условию Каратеодори.

Определение 1.1. Под *положительным решением* задачи (1.1)–(1.3) будем подразумевать функцию $x \in \mathbb{W}^n$ положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую на указанном интервале уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2), (1.3).

2. Основные результаты

Рассмотрим эквивалентное задаче (1.1)–(1.3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds, \qquad 0 \le t \le 1, \tag{2.1}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-D^{\alpha}_{0+}x(t)$ с краевыми условиями (1.2), (1.3), определяемая формулой

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(t(1-s))^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } 0 \le s \le t, \\ \dfrac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } t \le s \le 1. \end{cases}$$

Лемма 2.1. *Ядро $G(t,s)$ обладает следующими свойствами:*

1. $G(t,s) \ge 0, \quad (t,s) \in [0,1]\times[0,1]\,;$
2. $\max_{0\le t\le 1} \displaystyle\int_0^1 G(t,s)\,ds = \frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}\,;$
3. $\max_{0\le t\le 1} G(t,s) = \dfrac{(s-s^2)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,;$
4. $G(t,s) \le G(s,s), \quad (t,s) \in [0,1]\times[0,1].$

Доказательство. Выполнение свойства 1 очевидно.

Введем теперь обозначения:

$$g_1(t,s) = (t(1-s))^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}, \ \ 0 \le s \le t$$
$$g_2(t,s) = (t(1-s))^{\alpha-1}, \ \ t \le s \le 1.$$

Для этих функций имеем

$$\int_0^t g_1(t,s)\,ds = \frac{t^{\alpha-1}-t^{\alpha}}{\alpha} - \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha}}{\alpha},$$
$$\int_t^1 g_2(t,s)\,ds = \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha}}{\alpha}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 G(t,s)\,ds = \frac{t^{\alpha-1}-t^{\alpha}}{\alpha},$$

откуда следует справедливость свойства 2.

Далее, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1(t,s)}{\partial t} &= (\alpha-1)t^{\alpha-2}\left[(1-s)^{\alpha-1} - \left(1-\frac{s}{t}\right)^{\alpha-2}\right] \\ &\le (\alpha-1)t^{\alpha-2}\left[(1-s)^{\alpha-2} - \left(1-\frac{s}{t}\right)^{\alpha-2}\right] \le 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $g_1(t,s)$ монотонно убывает по t, а поэтому при $t \ge s$ эта функция достигнет максимума в точке $t = s$. С другой стороны, очевидно,

$$\max_{t\le s} g_2(t,s) = (s(1-s))^{\alpha-1}.$$

Таким образом, выполнение свойства 3 установлено.

Наконец, свойство 4 вытекает из монотонности по t функций $g_1(t,s)$ и $g_2(t,s)$. □

Предположим, что функция $f(t,u)$ при п. в. $t \in [0,1]$ и любых неотрицательных u удовлетворяет условию

$$f(t,u) \le a(t) + bu^{p/q}, \tag{2.2}$$

где $b > 0$, $a(t) \in \mathbb{L}_q$, $q \in (1,\infty)$.

Запишем уравнение (2.1) в операторном виде

$$x = GNTx,$$

где $N\colon \mathbb{L}_p \to \mathbb{L}_q$ — оператор Немыцкого, $G\colon \mathbb{L}_q \to C$.

Оператор A, определяемый равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s)f\left(s,(Tx)(s)\right)\,ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций, монотонен и оставляет инвариантным нормальный конус $\tilde{K}$ неотрицательных функций пространства C, удовлетворяющих граничным условиям (1.2), (1.3).

Далее для доказательства существования по крайней мере одного положительного решения задачи (1.1)–(1.3) нам понадобится следующая известная теорема Красносельского [17] (см. также [18, Theorem 2]).

Теорема 2.1. *Пусть E — банахово пространство, $K \subset E$ — конус, а Ω_1, Ω_2 — два ограниченных открытых шара E с центром в начале координат, причем $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Предположим, что $\Phi : K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \to K$ — вполне непрерывный оператор такой, что выполнено одно из двух условий*

(i) $\forall x \in K \cap \partial\Omega_1$ $\|\Phi x\| \le \|x\|$ *и* $\forall x \in K \cap \partial\Omega_2$ $\|\Phi x\| \ge \|x\|$,

(ii) $\forall x \in K \cap \partial\Omega_1$ $\|\Phi x\| \ge \|x\|$ *и* $\forall x \in K \cap \partial\Omega_2$ $\|\Phi x\| \le \|x\|$.

Тогда Φ имеет неподвижную точку в $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.

Лемма 2.2. *Оператор* $A : \tilde{K} \to \tilde{K}$ *вполне непрерывен.*

Доказательство. Определим функцию $g(s) = \max_{0 \le t \le 1} G(t, s)$, $s \in [0, 1]$. Заметим, что согласно лемме 2.1

$$g(s) = \frac{(s - s^2)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Пусть $R > 0$ и $\mathcal{S} = \{x \in \tilde{K} : \|x\|_C < R\}$. Для $x \in \mathcal{S}$ имеем

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_C = \max_{0 \le t \le 1} \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds \le \int_0^1 \max_{0 \le t \le 1} G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds \\
\le \int_0^1 g(s) a(s)\, ds + b \int_0^1 g(s) \left(Tx\right)^{\frac{p}{q}}(s)\, ds \le \|a\|_{\mathbb{L}_q} \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} \\
\le \|a\|_{\mathbb{L}_q} \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}} \|x\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} < \|a\|_{\mathbb{L}_q} \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}} R_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}},
\end{aligned}$$

где τ — норма оператора T, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Следовательно, множество $A(\mathcal{S})$ равномерно ограничено.

Для любого $\varepsilon > 0$ положим

$$\delta = \left(\frac{\varepsilon}{\|a\|_{\mathbb{L}_q} \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}} R_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}}} \right)^{\frac{1}{\alpha - 1}}.$$

Пусть для любых $t_1, t_2 \in [0, 1]$ выполнено

$$|t_2 - t_1| < \delta.$$

В силу (2.2) для всех $x \in \mathcal{S}$ имеем

$$\begin{aligned}
|(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)| \le \int_0^1 |G(t_2, s) - G(t_1, s)| f\left(s, (Tx)(s)\right) ds \\
\le \left| t_2^{\alpha - 1} - t_1^{\alpha - 1} \right| \int_0^1 f\left(s, (Tx)(s)\right) ds < \left(\|a\|_{\mathbb{L}_q} \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}} R_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} \right) |t_2 - t_1|^{\alpha - 1} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, следует равностепенная непрерывность оператора A на $\mathcal{S}$.

Таким образом, согласно теореме Арцела–Асколи оператор A вполне непрерывен. □

Введем обозначения:

$$\begin{gathered}
\Omega_1 = \left\{ \omega \in \tilde{K} : \|\omega\|_C < r \right\}, \quad \partial\Omega_1 = \left\{ \omega \in \tilde{K} : \|\omega\|_C = r \right\}, \\
\Omega_2 = \left\{ \omega \in \tilde{K} : \|\omega\|_C < R \right\}, \quad \partial\Omega_2 = \left\{ \omega \in \tilde{K} : \|\omega\|_C = R \right\}, \\
\Omega = \overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1,
\end{gathered}$$

где $r, R > 0$, причем $r < R$.

Теорема 2.2. *Предположим, что выполнено неравенство* (2.2) *и*

1. $p \ne q$;

2. для $p > q$ выполнено условие

$$\frac{p-q}{p}\left(\frac{q}{pb\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{\frac{p}{q}}}\right)^{\frac{q}{p-q}} \geq \|a\|_{\mathbb{L}_q}\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}};$$

3. $(T1)(t) \leq 1, \quad t \in [0,1]$;

4. существует такое число $r > 0$, что при п. в. $t \in [0,1]$ и $u \in [0,r]$

$$f(t,u) \geq \mu r,$$

где $\mu \geq \dfrac{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\alpha-1)^{\alpha-1}}$.

Тогда краевая задача (1.1)–(1.3) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Доказательство. Проверим выполнение условия (ii) теоремы 2.1. Для этого покажем существование числа $R > 0$ такого, что при $x \in \partial\Omega_2$

$$\|Ax\|_C \leq \|x\|_C. \tag{2.3}$$

Действительно, в силу (2.2) для $x \in \partial\Omega_2$ имеем

$$\begin{aligned} \|Ax\|_C &= \max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G(t,s)f\left(s,(Tx)(s)\right)\,ds \leq \int_0^1 \max_{0\leq t\leq 1} G(t,s)f\left(s,(Tx)(s)\right)\,ds \\ &\leq \int_0^1 g(s)a(s)\,ds + b\int_0^1 g(s)\,(Tx)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds \leq \|a\|_{\mathbb{L}_q}\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} \\ &\leq \|a\|_{\mathbb{L}_q}\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{\frac{p}{q}}\|x\|_C^{\frac{p}{q}} = \|a\|_{\mathbb{L}_q}\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{\frac{p}{q}}R^{\frac{p}{q}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(s) = s - \beta s^{\sigma} - \gamma,$$

где $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$, $\sigma > 0$, $\sigma \neq 1$.

Несложно проверить, что наибольшее значение этой функции при $\sigma > 1$ на положительной полуоси достигается в точке

$$s_{max} = \left(\frac{1}{\sigma\beta}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}. \tag{2.5}$$

Положив $\beta = b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{\frac{p}{q}}$, $\gamma = \|a\|_{\mathbb{L}_q}\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}$ и $\sigma = p/q$, принимая во внимание условие 2 теоремы, обеспечивающее неотрицательность функции φ в точке s_{max}, из (2.4) при $R = s_{max}$, получим (2.3).

В случае $0 < \sigma < 1$, выбрав в качестве R любое положительное число, для которого $\varphi(R) > 0$ при определенных выше значениях β, γ и σ, очевидным образом, обеспечим выполнение (2.3).

Укажем теперь такое число $r > 0$, что при $x \in \partial\Omega_1$

$$\|Ax\|_C \geq \|x\|_C.$$

В силу условий 3 и 4 теоремы и соответствующих свойств функции Грина леммы 2.1 для $x \in \partial\Omega_1$ имеем

$$\|Ax\|_C = \max_{0\le t\le 1}\int_0^1 G(t,s) f\left(s,(Tx)(s)\right) ds$$
$$\ge \mu r \max_{0\le t\le 1}\int_0^1 G(t,s)\,ds = \mu r\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)} \ge \|x\|_C.$$

Таким образом, при соответствующем выборе r и R, нетрудно обеспечить выполнение условия (ii) теоремы 2.1. Следовательно, вполне непрерывный оператор A имеет по крайней мере одну неподвижную точку в Ω, что в свою очередь эквивалентно существованию хотя бы одного положительного решения краевой задачи (1.1)–(1.3) такого, что $r \le \|x\|_C \le R$, где r и R определены выше. □

Следующий пример иллюстрирует использование теоремы 2.2 при исследовании конкретных краевых задач.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим краевую задачу

$$D_{0+}^{5/2}x(t) + b\left(\int_0^1 x(s)\,ds\right)^3 + a = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{2.6}$$

$$x(0) = x'(0) = x(1) = 0, \tag{2.7}$$

где $a \ge 0$ и $b > 0$ — некоторые действительные числа, которые определим ниже.

Здесь, очевидно, $\alpha = 5/2$, $p/q = 3$ и $f(t,u) = bu^3 + a$. В дальнейшем для удобства и простоты вычислений положим $p = 6$ и $q = 2$. В неравенстве (2.2) в качестве $a(t)$, в частности, можно взять положительное число a. В силу леммы 2.1,

$$g(s) = \max_{0\le t\le 1} G(t,s) = \frac{(s-s^2)^{3/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}(s-s^2)^{3/2}.$$

Следовательно,

$$\|g\|_{\mathbb{L}_2} = \sqrt{\int_0^1 g^2(s)\,ds} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{\int_0^1 (s-s^2)^3\,ds} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{140}} = \frac{2}{3\sqrt{35\pi}}.$$

Для линейного интегрального оператора $T\colon C \to \mathbb{L}_6$, определенного равенством

$$(Tx)(t) = \int_0^1 x(s)\,ds,$$

выполнение условия 3 теоремы 2.2 очевидно. Кроме того, норма этого оператора $\tau = 1$. Тогда условие 2 теоремы 2.2 принимает вид

$$\sqrt{\frac{\sqrt{35\pi}}{2b}} \ge \frac{a}{\sqrt{35\pi}}. \tag{2.8}$$

Выясним, наконец, при каких положительных значениях r и R, соответственно, выполняется условие 4 теоремы 2.2 и можно гарантировать требуемое в теореме 2.1 растяжение оператора A. Условие 4 теоремы 2.2 в данном случае примет вид неравенства

$$bu^3 + a \ge \mu r, \tag{2.9}$$

где
$$\mu \geq \left(\frac{5}{2}\right)^{7/2}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \approx 17.88.$$
Нетрудно проверить, что неравенство (2.9) выполняется на интервале $\left[\sqrt[3]{\frac{\mu}{b}r - \frac{a}{b}}, \infty\right)$. С другой стороны, согласно теореме 2.2 неравенство (2.9) должно быть обеспечено при $u \in [0, r]$. Следовательно, сгруппировав соответствующие интервалы, получим $r = \dfrac{a}{\mu}$.

Искомое R в соответствии (2.5)
$$R = s_{max} = \sqrt{\frac{\sqrt{35\pi}}{2b}}.$$
Учитывая требование $r < R$, окончательно получим правило выбора границ множества Ω
$$\frac{a}{\mu} < \sqrt{\frac{\sqrt{35\pi}}{2b}}. \tag{2.10}$$

Таким образом, при выполнении неравенства (2.8), выбирая числа r и R в соответствии с (2.10), на основании теоремы (2.2) заключаем, что краевая задача (2.6), (2.7) имеет хотя бы одно положительное решение такое, что $r \leq \|x\|_C \leq R$.

В частности, при $a = \mu = 18$, $b = 1$, легко проверить, что рассматриваемая задача имеет по крайней мере одно положительное решение такое, что $1 \leq \|x\|_C \leq \sqrt{\dfrac{\sqrt{35\pi}}{2}}$.

References

[1] X. Xu, D. Jiang, C. Yuan, "Multiple positive solutions for the boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **71**:10 (2009), 4676–4688.

[2] S. Sun, Y. Zhao, Z. Han, M. Xu, "Uniqueness of positive solutions for boundary value problems of singular fractional differential equations", *Inverse Problems in Science and Engineering*, **20**:3 (2012), 299–309.

[3] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, W. Feng, "Positive solutions for a coupled system of nonlinear differential equations of mixed fractional orders", *Advances in Difference Equations*, 2011, № 1, 1–13.

[4] T. Qiu, Z. Bai, "Existence of positive solutions for singular fractional differential equations", *Electronic Journal of Differential Equations*, **2008**:146 (2008), 1–9.

[5] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, Q. Li, "Positive solutions to boundary value problems of nonlinear fractional differential equations", *Abstract and Applied Analysis*, **2011**:217 (2011), 6950–6958.

[6] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, Q. Li, "The existence of multiple positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**:4 (2011), 2086–2097.

[7] B. Ahmad, R. P. Agarwal, "Some new versions of fractional boundary value problems with slit-strips conditions", *Boundary Value Problems*, **175** (2014), 1–12.

[8] X. Zhang, L. Liu, Y. Wu, Y. L, "The iterative solutions of nonlinear fractional differential equations", *Applied Mathematics and Computation*, **219**:9 (2013), 4680–4691.

[9] X. Zhang, L. Liu, Y. Wu, "Existence results for multiple positive solutions of nonlinear higher order perturbed fractional differential equations with derivatives", *Applied Mathematics and Computation*, **219**:4 (2012), 1420–1433.

[10] X. Zhang, L. Liu, Y. Wu, "Multiple positive solutions of a singular fractional differential equation with negatively perturbed term", *Mathematical and Computer Modelling*, **55**:3–4 (2012), 1263–1274.

[11] Y. Wang, L. Liu, Y. Wu, "Positive solutions for a nonlocal fractional differential equation", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **74**:11 (2011), 3599–3605.

[12] Zhanbing Bai, Haishen Lü, "Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **311**:2 (2005), 495–505.

[13] S. Zhang, "Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations", *Electronic Journal of Differential Equations*, **2006**:36 (2006), 1–12.

[14] S. Liang, J. Zhang, "Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **71**:11 (2009), 5545–5550.

[15] Г. Э. Абдурагимов, "О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка", *Материалы Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXX». Воронеж, 3–9 мая 2019 г. Часть 5*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **194**, ВИНИТИ РАН, М., 2021, 3–7. [G. E. Abduragimov, "On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear functional-differential equation of fractional order", *Proceedings of the Voronezh spring mathematical school "Modern methods of the theory of boundary-value problems. Pontryagin readings – XXX". Voronezh, May 3-9, 2019. Part 5*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., **194**, VINITI, Moscow, 2021, 3–7 (In Russian)].

[16] Г. Э. Абдурагимов, "О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка", *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:138 (2022), 129–135. [G. E. Abduragimov, "On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear functional-differential equation of fractional order", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:138 (2022), 129–135 (In Russian)].

[17] M. A. Krasnosel'skii, *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff, Groningen, 1964.

[18] A. Cabada, J. Iglesias, "Nonlinear differential equations with perturbed Dirichlet integral boundary conditions", *Boundary Value Problems*, **66** (2021), 1–19.

Информация об авторе

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики. Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Российская Федерация. E-mail: gusen_e@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7095-932X

Поступила в редакцию 19.01.2023 г.
Поступила после рецензирования 14.04.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

Information about the author

Gusen E. Abduragimov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department. Dagestan State University, Makhachkala, Russian Federation. E-mail:gusen_e@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7095-932X

Received 19.01.2023
Reviewed 14.04.2023
Accepted for press 09.06.2023